

Шәкір Айдос 

Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

e-mail: ajdossakir@gmail.com

8-дәріс. Біртекті және біртекті емес толқындық теңдеулер үшін бастапқы-шеттік есептерді Фурье әдісімен шешу.

Дәрістің мақсаты – Тұтқыр серпімді сығылмайтын сұйықтықтардың қозғалысын сипаттайтын ньютондық немесе ньютондық емес гидродинамика теңдеулерінің математикалық моделдерін тұжырымдау.

Негізгі сұрақтар:

1. Біртекті толқындық теңдеулер үшін бастапқы-шеттік есептерді Фурье әдісімен шешу.
2. Біртекті емес толқындық теңдеулер үшін бастапқы-шеттік есептерді Фурье әдісімен шешу.

1 Біртекті толқындық теңдеулер үшін бастапқы-шеттік есеп: Фурье әдісі

Бірөлшемді біртекті толқындық теңдеу:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (1.1)$$

Бастапқы шарттар:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad (1.2)$$

Шекаралық шарттар:

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (1.3)$$

Мақсат: $u(x, t)$ шешімін табу.

2 Фурье әдісімен шешу

Фурье әдісі бойынша шешімді айнымалыларды ажырату арқылы іздейміз:

$$u(x, t) = X(x)T(t).$$

Теңдеуге алмастырамыз:

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t) \Rightarrow \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

Бұл екі бірөлшемді теңдеуге бөлінеді:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = X(L) = 0, \quad (2.1)$$

$$T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0. \quad (2.2)$$

3 Штурм-Лиувилль есебі

Теңдеуді (2.1) шешеміз:

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Сондықтан (2.2) теңдеуі:

$$T_n''(t) + a^2 \lambda_n T_n(t) = T_n''(t) + \left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 T_n(t) = 0,$$

шешімі:

$$T_n(t) = A_n \cos\left(\frac{n\pi a}{L}t\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi a}{L}t\right).$$

4 Жалпы шешім

Біртекті шешімдер суперпозициясы:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{n\pi a}{L}t\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi a}{L}t\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (4.1)$$

5 Коэффициенттерді анықтау

Бастапқы шарттарды қолданамыз: 1. $t = 0$ кезінде:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \varphi(x) \Rightarrow A_n = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

2. $u_t(x, 0) = \psi(x)$:

$$u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi a}{L} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \psi(x) \Rightarrow B_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^L \psi(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

6 Қорытынды

- Толқындық теңдеуді Фурье әдісімен шешу үшін айнымалыларды ажыратамыз. - $X_n(x)$ — Штурм-Лиувилль есебінің меншікті функциялары (sin-тәрізді). - $T_n(t)$ — гармоникалық функциялар, бастапқы шарттарға байланысты коэффициенттермен. - Жалпы шешім (4.1) суперпозиция түрінде жазылады.

7 Біртекті емес толқындық теңдеулер үшін бастапқы-шеттік есептер: Фурье әдісі

Бірөлшемді біртекті емес толқындық теңдеу:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (7.1)$$

бастапқы шарттар:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad (7.2)$$

шекаралық шарттар

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (7.3)$$

Мақсат: $u(x, t)$ шешімін табу.

8 Фурье әдісі

8.1 Айнымалыларды ажырату және кеңейту

Шекаралық шарттарды қанағаттандыратын меншікті функцияларды (sin түрінде) аламыз:

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2.$$

Шешімді меншікті функциялар бойынша кеңейтеміз:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

мұндағы

$$F_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L f(x, t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

8.2 Уақыт функцияларының теңдеуі

Теңдеуге (7.1) алмастырсақ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n''(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = -a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n U_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Ортогоналдық қасиетін қолдансақ:

$$U_n''(t) + a^2 \lambda_n U_n(t) = F_n(t), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (8.1)$$

Бастапқы шарттар:

$$U_n(0) = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad U_n'(0) = \frac{2}{L} \int_0^L \psi(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

9 Бірөлшемді шешім

Бірөлшемді теңдеу (8.1) шешіледі стандартты тәсілмен:

$$U_n(t) = A_n \cos(a\sqrt{\lambda_n}t) + B_n \sin(a\sqrt{\lambda_n}t) + U_{n,p}(t),$$

мұндағы $U_{n,p}(t)$ — дербес шешім, $F_n(t)$ -ға байланысты. Бастапқы шарттар арқылы:

$$A_n = U_n(0), \quad B_n = \frac{U_n'(0)}{a\sqrt{\lambda_n}}.$$

10 Жалпы шешім

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos(a\sqrt{\lambda_n}t) + B_n \sin(a\sqrt{\lambda_n}t) + U_{n,p}(t) \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (10.1)$$

- A_n, B_n — бастапқы шарттардан есептеледі - $U_{n,p}(t)$ — функциясы $f(x, t)$ -ге байланысты дербес шешім

11 Қорытынды

- Біртекті емес толқындық теңдеуді Фурье әдісімен шешу үшін меншікті функциялар бойынша кеңейту қолданылады. - Барлық кеңейту коэффициенттері уақыт бойынша бірөлшемді дифференциалдық теңдеулерді шешу арқылы табылады. - Нәтижесінде жалпы шешім (10.1) суперпозиция түрінде жазылады.

12 Біртекті емес толқындық теңдеу: Фурье әдісімен мысал

Бірөлшемді біртекті емес толқындық теңдеу:

$$u_{tt} = u_{xx} + f(x, t), \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \quad (12.1)$$

бастапқы шарттар:

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad (12.2)$$

шекаралық шарттар:

$$u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0, \quad (12.3)$$

және бос мүшені сипаттайтын функциясы:

$$f(x, t) = \sin(x)e^{-t}.$$

Мақсат: $u(x, t)$ шешімін табу.

13 Фурье кеңейту

Дирихле шарттарына сәйкес меншікті функциялар:

$$X_n(x) = \sin(nx), \quad \lambda_n = n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Шешім мен бос мүшені сипаттайтын функциясын Фурье қатары бойынша кеңейтеміз:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(t) \sin(nx), \quad f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \sin(nx),$$

мұндағы

$$F_n(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x, t) \sin(nx) dx.$$

14 Фурье коэффициенттерін есептеу

$$F_n(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(x) \sin(nx) dx e^{-t} = \begin{cases} e^{-t}, & n = 1, \\ 0, & n > 1. \end{cases}$$

Сондықтан тек $n = 1$ мүшесі қалды:

$$U_1''(t) + \lambda_1 U_1(t) = U_1''(t) + U_1(t) = e^{-t}, \quad U_1(0) = 0, \quad U_1'(0) = 0$$

$$U_{n>1}(t) = 0.$$

15 Дербес шешім және жалпы шешім

Дербес шешімді табамыз:

$$U_{1,p}(t) = \frac{e^{-t}}{2} \quad (\text{тексеру: } U_{1,p}'' + U_{1,p} = e^{-t}).$$

Жалпы шешім:

$$U_1(t) = A \cos(t) + B \sin(t) + \frac{e^{-t}}{2}.$$

Бастапқы шарттарды қолданамыз:

$$U_1(0) = A + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow A = -\frac{1}{2},$$

$$U_1'(0) = B - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow B = \frac{1}{2}.$$

Сондықтан:

$$U_1(t) = -\frac{1}{2} \cos(t) + \frac{1}{2} \sin(t) + \frac{1}{2} e^{-t}.$$

16 Жалпы шешім

$$u(x, t) = U_1(t) \sin(x) = \left(-\frac{1}{2} \cos(t) + \frac{1}{2} \sin(t) + \frac{1}{2} e^{-t} \right) \sin(x)$$

Барлық $n > 1$ мүшелері 0 болғандықтан, тек $n = 1$ шығады.

Студенттерге қосымша әрі толыққанды мәліметтер алу үшін [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7] әдебиеттер ұсынылады.

Список литературы

- [1] Токибетов Ж.А., Хайруллин Е.М. Математикалық физика теңдеулері. Астана, 2010 ж. 16
- [2] Михлин С.Г. Курс математической физики. М., 1968. 16
- [3] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М., 1984. 16
- [4] Орынбасаров М.О., Оршубеков Н.Ә. Математикалық физика теңдеулері. Алматы, 2009 ж. 16
- [5] Орынбасаров М.О., Сахаев Ш.С. Математикалық физика теңдеулерінің есептері мен жаттығулар жинағы. Алматы, 2009 ж. 16

- [6] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М., 2006. 16
- [7] Хомпыш Х. Математикалық физика теңдеулері. Алматы, Қазақ Университеті, 2017 ж. 215 б. 16